PART4　点と直線の距離

例題

(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $y=\dfrac{3}{2}x+2$ の距離を求めよ。

(2)　座標平面上に３点 $A(-1,\ -1)$，$B(3,\ -2)$，$C(1,\ 2)$ がある。次のものを求めよ。

(i)　直線 AB の方程式

(ii)　点 C と直線 AB の距離

(iii)　△ABC の面積

Point Pickup

練習

⑴　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ。

⑵　3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(4,\ 3)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

第５講　PART4 確認問題

1　点 (2, 5) と直線 $y=-\frac{1}{3}x-1$ の距離を求めよ。

$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}$

2　3 点 A(2, 1), B(−2, 9), C(4, 7) を頂点とする △ABC の面積を求める。

△ABC の辺 AB を底辺とする。

まず，直線 AB の方程式を求めると

$\boxed{エ}x+y-\boxed{オ}=0$

また，点 C と直線 AB の距離 d を求めると

$d=\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$

さらに，線分 AB の長さは

$\mathrm{AB}=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$

したがって，△ABC の面積 S は

$S=\boxed{コサ}$

PART4　点と直線の距離

例題

(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $y=\dfrac{3}{2}x+2$ の距離を求めよ。

(2)　座標平面上に３点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$，$\mathrm{C}(1,\ 2)$ がある。次のものを求めよ。

(i)　直線 AB の方程式

(ii)　点 C と直線 AB の距離

(iii)　△ABC の面積

(1)　$y=\dfrac{3}{2}x+2$　より　$3x-2y+4=0$

よって，求める距離は　$\dfrac{|3\cdot1-2\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

(2) (i)　$y=\dfrac{-2-(-1)}{3-(-1)}(x+1)-1=-\dfrac{1}{4}(x+1)-1$　より　$4y=-(x+1)-4$

よって　$x+4y+5=0$

(ii)　点 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ と直線 $x+4y+5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1+4\cdot2+5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|14|}{\sqrt{17}}=\frac{14}{\sqrt{17}}=\frac{14\sqrt{17}}{17}$$

(iii)　線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{17}$$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{14}{\sqrt{17}}=7$$

練習

(1)　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ。

(2)　3 点 $A(-2,\ 1)$，$B(1,\ -3)$，$C(4,\ 3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$　より　$x-2y+1=0$

よって，求める距離は　$\dfrac{|3-2\cdot7+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(2)　直線 BC の方程式は

$$y=\frac{3-(-3)}{4-1}(x-1)-3=2(x-1)-3=2x-5 \quad \text{より} \quad 2x-y-5=0$$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot(-2)-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

線分 BC の長さは

$$BC=\sqrt{(4-1)^2+\{3-(-3)\}^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

よって，$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=15$$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：10

[解説]

$y=-\dfrac{1}{3}x-1$ より　$x+3y+3=0$

求める距離は，点 $(2,\ 5)$ と直線 $x+3y+3=0$ の距離であるから

$$\frac{|2+3\cdot5+3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|20|}{\sqrt{10}}$$ [A]

$$=\frac{20}{\sqrt{10}}=\mathbf{2\sqrt{10}}$$

[A]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2

[正解] **エ**：2，**オ**：5，**カ**：2，**キ**：5，**ク**：4，

ケ：5，**コサ**：20

[解説]

直線ABは2点A(2，1)，B(−2，9)を通るから，

その方程式は

$$y-1=\frac{9-1}{-2-2}(x-2) \quad \text{[B]}$$

$$y=-2x+5$$

すなわち　$\mathbf{2x+y-5=0}$

点C(4，7)と直線AB：$2x+y-5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot4+7-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{|10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

線分ABの長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(9-1)^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+8^2}=\sqrt{80}=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

よって，△ABCの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}$$

$$=\mathbf{20}$$

[B]　直線の方程式
異なる2点 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$ を通る直線の方程式は，$x_1 \neq x_2$ のとき

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

[C]　点と直線の距離
点 $(x_1，y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[D]　△ABCの辺ABを底辺とすると，点Cと直線ABの距離が高さとなる。